



# Primjena kvadratne funkcije (ekonomske funkcije – cijena)



<b>Nastavni predmet:</b>	<b>Matematika – II razred</b>
<b>Obrazovno-vaspitni ishod 3</b>	<b>Kvadratne jednačine i nejednačine. Kvadratne funkcije</b>
<b>Ishod učenja</b>	Tokom učenja učenici će moći da: Objasne osobine kvadratne funkcije i crtaju njen grafik
<b>Oblik rada</b>	frontalni; individualni, rad u parovima
<b>Nastavne metode</b>	dijalog; rješavanje zadataka; heuristička metoda
<b>Obrazovni zadatak</b>	Osposobljavanje učenika za primjenu kvadratne na ekonomske funkcije
<b>Vaspitni zadatak</b>	Kod učenika razviti svijest o prisustvu matematike u društvenim naukama (ekonomiji), kao i svijest o ranije stečenom znanju
<b>Funkcionalni zadatak</b>	razvijanje sposobnosti za povezivanje gradiva, sistematičnosti i analitičnog pristupa u rješavanju problema
<b>Aktivnost nastavnika</b>	daje osnovne smjernice o radu, definiše ishod časa, pruža pomoć učenicima prilikom rada, podstiče učenike na diskusiju, usmjerava diskusiju ka postizanju ishoda
<b>Aktivnost učenika</b>	učestvuju u diskusiji, prate izlaganja nastavnika, postavljaju pitanja, samostalno rade zadatke koje nastavnik postavi, analiziraju ishode istih

## Plan toka časa

FAZA	AKTIVNOST NASTAVNIKA	AKTIVNOST UČENIKA	METODE/ OBLICI RADA	MEDIJI I MATERIJAL	ISHODI Učenik će biti u stanju da:	NAPOMENA
<b>Motivacija</b>	Nastavnik postavlja pitanja koja se odnose na ekonomske teme koje će koristiti u toku časa; radi prvi primjer	Učenici odgovaraju na pitanja i povezuju gradivo iz ekonomskih predmeta;	Individualni rad Rad u parovima	Tabla; markeri Prilog 1 Aplikacija geogebra računar Pripremljena prezentacija	Rješavati kvadratne funkcije	<b>Zainteresovati učenike za dalji rad</b>
<b>Rješavanje zadataka</b>	Objašnjava kaka se osobine kvadratne funkcije primjenjuju na ekonomske funkcije  Zadavanje zadataka (2,3,4)  Pomaže učenicima u rješavanju zadataka	Slušaju i odgovaraju na postavljena pitanja, povezuju za prethodnim gradivom  Učestvuju u diskusiji, postavljaju pitanja, rješavaju zadatke	Rad u parovima  Parovi rade jedan od tri postavljena zadatka, a zatim objašnjavaju rezultat ostalim učenicima	Tabla; Markeri računar Pripremljeni zadaci- prezentacija Aplikacija geogebra	Rješavaju kvadratne funkcije; osobine kvadratne funkcije primjenjene na tražene ekonomske funkcije	<b>Razmišljaju o rješavanju zadataka; koriste prethodna matematička znanja i znanja iz ekonomskih predmeta na njihovo rješavanje</b>
<b>Domaći zadatak</b>	<b>Predstavlja pripremljeni materijal,obrazlaže zahtjeve zadatka</b>	<b>Rješavaju zadatak , obrazlažu rješenja i izvode zaključke</b>	<b>Grupni rad</b>	<b>Pripremljeni materijal</b>	<b>Rješava zadatke</b>	<b>Razumiju značaj matematike u rješavanju ekonomskih problema</b>

Tok časa:

Kvadratna funkcija ima primjenu, kako u matematici, tako i mnogim drugim naukama. Primjenu ima i u ekonomiji.

Svaka ekonomska funkcija zavisi od više faktora: cijena, broj potencijalnih potrošača, kupovna moć, marketing, kvalitet, konkurencija..

*Zajedno sa učenicima nabrojati koje su ekonomske funkcije učili.*

❖ **FUNKCIJA TRAŽNJE** (količina prodane robe)

$x = f(p)$ , gdje je  $p$  cijena, koja je najvažniji faktor

❖ **FUNKCIJA PONUDE**

$y = f(p)$ ,  $p$  je cijena

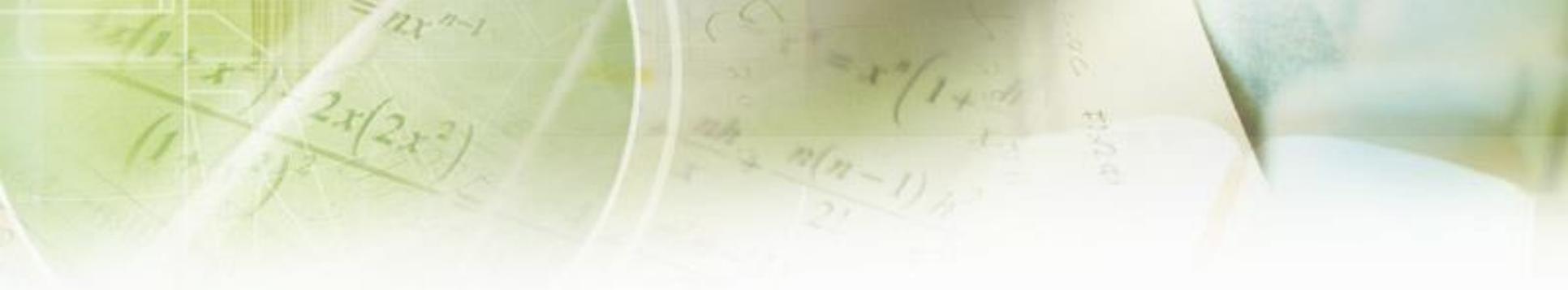
❖ **FUNKCIJA (UKUPNIH) TROŠKOVA** (funkcija obima proizvodnje)

$T = f(x)$ ,  $x$  je obim proizvodnje

❖ **FUNKCIJA PROSJEČNIH TROŠKOVA**

$$\bar{T} = \frac{T}{x}$$

Cilj svakog profitabilnog poslovanja je **minimiziranje** prosječnih troškova.



❖ **RAVNOTEŽA TRŽIŠTA**  $x = y$

❖ **FUNKCIJA PRIHODA**

$P = x \cdot p$ , gde je  $x$  je funkcija tražnje (količina prodane robe) i  $p$  je cijena

❖ **FUNKCIJA PROSEČNOG PRIHODA**

$$\bar{P} = \frac{P}{x}$$

❖ **INTERVAL RENTABILNOSTI** se dobija iz uslova  $P = T$

❖ **FUNKCIJA DOBITI** (razlika prihoda i troškova)

$$D = P - T$$

Ako je  $D > 0$  **proizvodnja je rentabilna** (poslovanje bez gubitaka)

**Interval rentabilnosti** se dobija iz uslova  $D=0$

Svako rentabilno poslovanje traži **max** ove funkcije



Razmotrimo jednu moguću primjenu kvadratne funkcije u poslovanju i optimiziranju dobiti. Dobit je razlika između ukupnog prihoda i troškova proizvodnje. Odnos između cijene proizvoda i prodane količine često je linearan, odnosno za svako povećanje cijene od 1€ postoji odgovarajuće smanjenje prodane količine.

*(Razmislite o tome: ako se cijena nečega poveća, kupujete li više ili manje? Nadamo se manje!)* Nakon što odredimo odnos između prodajne cijene proizvoda i prodane količine, možemo razmišljati o tome kako postići najveću dobit.

Za koju cijenu proizvoda je dobit najveća?

Iznos ostvarene dobiti računamo oduzimanjem troškova proizvodnje od ukupnog prihoda (prodana količina pomnožena s prodajnom cijenom).

Uvrštavanjem linearnog odnosa prodajne cijene s količinom u formulu dobiti imamo kvadratnu funkciju. Pogledajmo primjer.

## primjer 1:

Tablicom ćemo prikazati odnos cijene i broja prodanih proizvoda, uz podatak da je cijena proizvodnje 2 € po komadu.

Cijena proizvoda (€)- $x$	Broj prodanih proizvoda u 1 mjesecu - $m$
1	180
3	140
5	100
7	60

Podatke možemo prikazati linearnom funkcijom:

$$m = -20x + 100$$

Funkcija dobiti je:

$$D = x \cdot m - 2 \cdot m$$

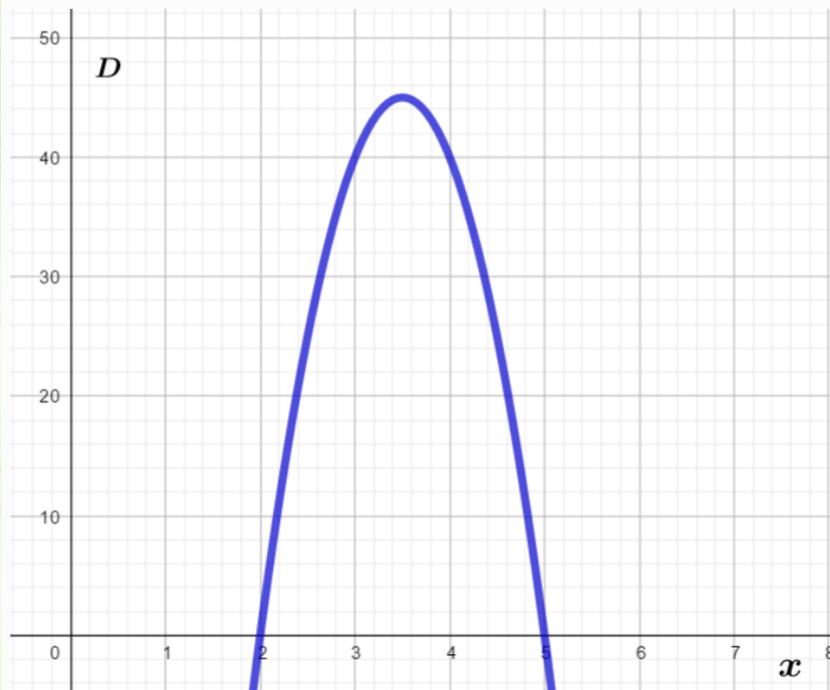
$$\text{tj. } D(x) = -20x^2 + 140x - 200$$

D dobit

$x$  prodajna cijena proizvoda

$m$  broj prodanih proizvoda

## primjer 1:



odgovorite na pitanja:

1. Za koju je cijenu proizvoda dobit najveća?
2. Kolika je najveća dobit?
3. Za koju je cijenu dobit 0?
4. Kolika je cijena proizvoda ako je dobit 40 €?

1. Dobit je najveća uz prodajnu cijenu od 3,5€.
2. Najveća je dobit 45 €.
3. Dobit je nula kad je prodajna cijena jednaka proizvodnoj cijeni (2€), ali i uz prodajnu cijenu od 5€.
4. Dobit od 40 € ostvarujemo uz prodajnu cijenu od 3 €, ali i od 4 €.

## primjer 2:

Agencija nudi jednodnevni izlet brodom Skaraskim jezerom . Cijena je izleta 30€ po osobi. Za svaku sledeću osobu cijena se umanjuje za 2€. Ako dvije osobe idu na izlet, cijena po osobi je 28€, za tri osobe 26€ . Kapacitet broda je 12 osoba. Ukupni troškovi agencije iznose 100€.

Koliko bi osoba trebalo biti prijavljeno za izlet da bi agencija poslovala rentabilno?

Kada će agencija postići maksimalnu dobit?

Koji je maksimalni ukupni prihod agencije?

Nacrtajte grafove funkcija prihoda i dobiti.

Rješenje:

➤  $x$  broj osoba na izletu

➤  $p$  cijena po osobi

$$p = 30 - 2(x - 1) = 32 - 2x$$

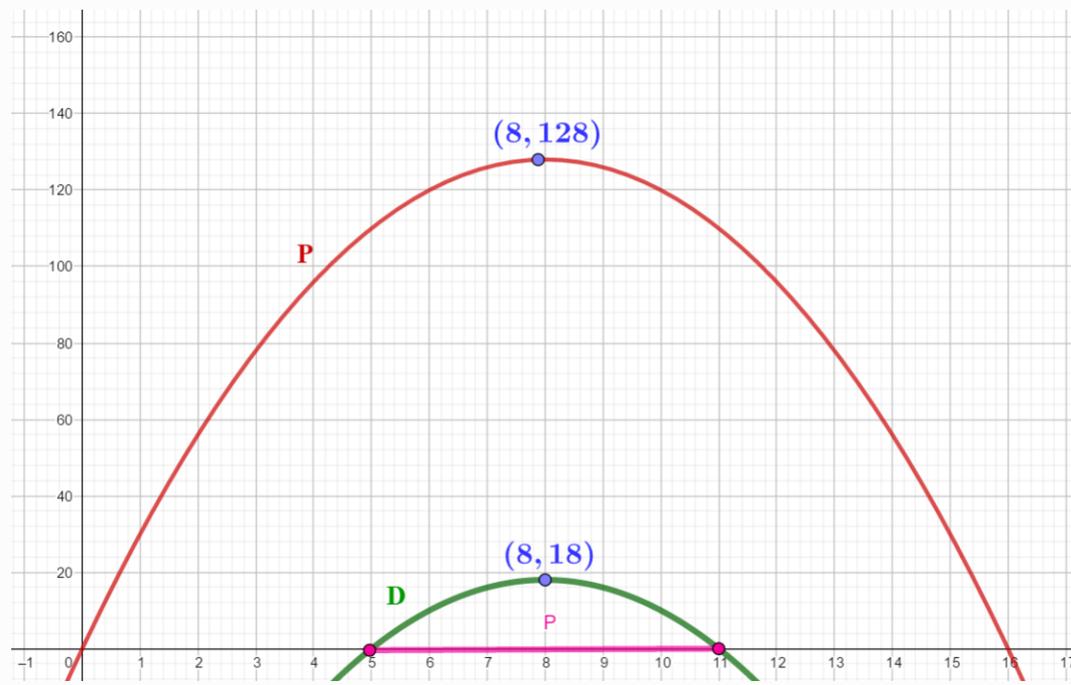
➤  $P(x)$  prihod agencije

$$P(x) = p \cdot x = (32 - 2x) \cdot x = 32x - 2x^2$$

➤  $D(x)$  dobit agencije

$$D(x) = P(x) - 100 = -2x^2 + 32x - 100$$

## primjer 2:



Interval rentabilnosti:  $x \in (5,11)$

tj. poslovanje je rentabilno ako na izlet ide između 5 i 11 osoba.

Agencija ostvaruje maksimalan ukupan prihod (128€) i maksimalnu dobit (18€) ako je na izletu 8 osoba.

**primjer 3:**

Date su funkcije tražnje i ponude

$$x = -p^2 + 20p + 400$$

$$y = 30p - 200$$

Odrediti uslove ravnoteže tržišta.



$$x = y$$

$$-p^2 + 20p + 400 = 30p - 200$$

$$p^2 + 10p - 600 = 0$$

~~$$p_1 = -30$$~~

$$p_2 = 20 \quad \rightarrow x = 400$$

$$y = 400$$

### primjer 4:

Prosječni mjesečni troškovi jednog preduzeća izraženi su u eurima

formulom  $\bar{T}(x) = 3 + \frac{64}{x}$

Ako je mjesečna potražnja proizvoda  $x = 25 - p$ , gdje je  $p$  cijena proizvoda, odredimo:

1. optimalnu količinu mjesečne prodaje za maksimalnu dobit
2. maksimalni ukupni mjesečni prihod
3. interval rentabilnosti
4. grafički prikaz funkcija ukupnih prihoda, ukupnih troškova te dobiti.

### Rješenje:

**funkcija ukupnih prihoda:**  $P(x) = p \cdot x$

$$p = -x + 25$$

$$P(x) = -x^2 + 25x$$

**funkcija ukupnih troškova:**

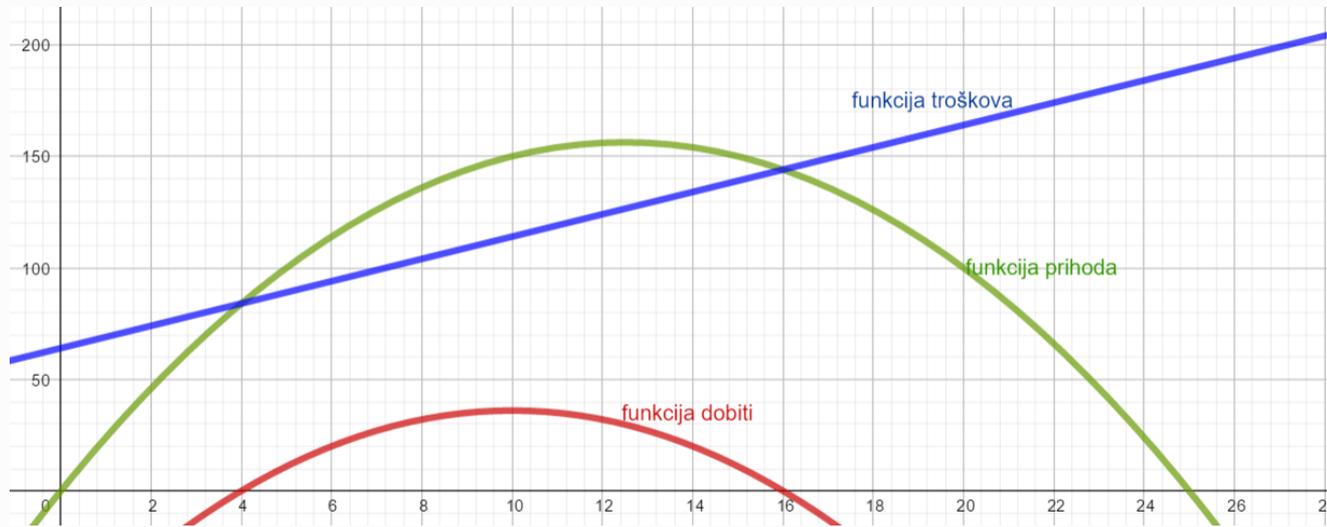
$$T(x) = x \cdot \bar{T}(x) = 5x + 64$$

## primjer 4:

funkcija dobiti:

$$D(x) = P(x) - T(x)$$

$$D(x) = -x^2 + 20x - 64$$



*Koristeći grafički prikaz, odgovori na postavljena pitanja*

#### primjer 4:

Porodica je sa porodičnog imanja nabrala 500 tona pomorandži, koje je u ovom trenutku može da proda po cijeni od 720€ po toni.

Izračunali su da će se svake nedjelje pokvariti 20 tona ako se budu čuvale u hladnjači, ali da će cijena porasti za 100€ po toni.

1. Kolika je zarada u početnom trenutku, a kolika poslije prve nedjelje?
2. Popuni sledeću tablicu.
3. Odredi formulu kojom će biti izražena zarada u funkciji rednog broja nedjelje.
4. Odredi najbolji trenutak za zaradu, odnosno poslije koje nedjelje će porodica ostvariti maksimalnu dobit

<u>nedjelja</u>	1.	2.	3.	4.	5.	6.
<u>količina zdravih pomorandži</u>	500					
<u>cijena po toni</u>	720					
<u>zarada</u>						

## Zadaci za samostalan rad:



1. Stambeni kompleks ima potražnju zadatu sa  $p(x) = -5x + 860$ , gdje je  $x$  broj stanova koji se iznajmljuju i  $p$  je cijena svakog apartmana. Troškovi održavanja kompleks iznosi 120 € po iznajmljenom stanu. Fiksni su troškovi od 6000 €. Odredite:
  1. jednačinu dobiti.
  2. broj stanova za iznajmljivanje za koji će dobit biti maksimalna.
  3. cijenu po kojoj se apartmani iznajmljuju da bi se ostvarila maksimalna dobit.
2. Funkcija potražnje za novim modelom digitalne kamere je  $p(x) = -5x + 39$ , gdje  $p$  predstavlja prodajnu cijenu proizvoda i  $x$  je broj prodatih kamera u hiljadama. Funkcija troškova je  $T(x) = 4x + 30$ .
  1. Koliko kamera mora biti prodato da bi kompanija postigla dobit?
  2. Koliko prodatih kamera donosi maksimalan profit?
3. Kablovska televizija trenutno ima 6 300 domaćinstava i naplaćuje 14 € mjesečno. Marketinška anketa pokazuje da će svako smanjenje mjesečne naplate od 1 € dovesti 630 novih kupaca. Pronađite vrijednost maksimalnog mjesečnog prihoda.